Πρόβλημα Μεταφοράς

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Πρόβλημα μεταφοράς

Πρόβλημα μεταφοράς

- m αποθήκες και n καταστήματα
- για κάθε αποθήκη i και κατάστημα j ένας αριθμός d_i διαθέσιμων πόρων και b_j αναγκαίων πόρων αντίστοιχα.
- έναν αριθμό κόστους c_{ij} για την μεταφορά μιας μονάδας αγαθών από την αποθήκη i στο κατάστημα j

Πρόβλημα μεταφοράς

Πρόβλημα μεταφοράς

- m αποθήκες και n καταστήματα
- για κάθε αποθήκη i και κατάστημα j ένας αριθμός d_i διαθέσιμων πόρων και b_j αναγκαίων πόρων αντίστοιχα.
- έναν αριθμό κόστους c_{ij} για την μεταφορά μιας μονάδας αγαθών από την αποθήκη i στο κατάστημα j

Λύση

Μια λύση του προβλήματος είναι η ανάθεση για κάθε αποθήκη ενός αριθμού πόρων για αποστολή προς κάθε κατάστημα. Μια βέλτιστη λύση του προβλήματος ελαχιστοποιεί το κόστος μεταφοράς.

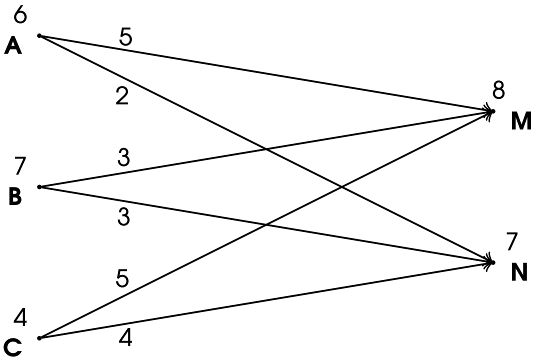
Παράδειγμα

- Τρία εργοστάσια είναι συνδεδεμένα μέσω σιδηροδρόμου ή αεροπλάνου με δύο κέντρα αποθήκευσης
- Τα τρία εργοστάσια έχουν διαθέσιμους πόρους $d_1 = 4$, $d_2 = 7$ και $d_3 = 6$
- Τα δύο κέντρα αποθήκευσης χρειάζονται $b_1 = 8$ και $b_2 = 7$ πόρους αντίστοιχα
- Τα κόστη μεταφοράς είναι $c_{11} = 5$, $c_{12} = 4$, $c_{21} = 3$, $c_{22} = 3$, $c_{31} = 5$ και $c_{32} = 2$

Μοντελοποίηση με γράφο

- εργοστάσια και κέντρα αποθήκευσης $\longrightarrow$ κόμβοι στο γράφο
- προσφορά και ζήτηση πόρων $\longrightarrow$ βάρη στους κόμβους του γράφου
- κόστος μεταφοράς $\longrightarrow$ βάρη στις ακμές

Παράδειγμα



Επίλυση

- Θεωρία γράφων : MinFlow-MaxCut (Ford Fulkerson)
- Γραμμικός προγραμματισμός
  - Μεταβλητές απόφασης x_{ij} : ποσότητα μεταφοράς από την αποθήκη i στο κατάστημα j.
  - Περιορισμοί : Χρήση όλων των διαθέσιμων πόρων και κάλυψη όλων των αναγκών
  - Αντικειμενική Συνάρτηση : Ελαχιστοποίηση του κόστους που δίνεται από την τύπο $\sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} x_{ij} c_{ij}$

$$\begin{aligned}
\min w = & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i, i = 1, \ldots, m \\
& x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

nm μεταβλητές και $n + m$ περιορισμοί

Αθροίζοντας τους περιορισμούς :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} d_i$$

Αθροίζοντας τους περιορισμούς :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} d_i$$

Καταλήγουμε πώς άν :

$\sum_{j=1}^{n} b_j \neq \sum_{i=1}^{m} d_i$,

τότε το πρόβλημα δεν είναι **εφικτό**!

Παράδειγμα Μοντελοποίησης

Δείκτης	Αποθήκες	Καταστήματα
1	12	6
2	11	6
3	7	3
4		2
5		13
Σύνολο	30	30

$$\text{Κόστη}: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\min w = \; & x_{11} + x_{22} + 2x_{13} + 6x_{14} + 3x_{15} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + \\
& 8x_{24} + 8x_{25} + 5x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} + 12x_{34} + 10x_{35} \\
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{22} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 11 \quad \text{(Αποθήκη 1)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 12 \quad \text{(Αποθήκη 2)} \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 7 \quad \text{(Αποθήκη 3)} \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6 \quad \text{(Κατάστημα 1)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6 \quad \text{(Κατάστημα 2)} \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3 \quad \text{(Κατάστημα 3)} \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2 \quad \text{(Κατάστημα 4)} \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} = 13 \quad \text{(Κατάστημα 5)} \\
& x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}
$$

Επίλυση μέσω Simplex

- Αρχική λύση (Βάση)

Επίλυση μέσω Simplex

- Αρχική λύση (Βάση)
- Υπολογισμός κριτηρίων υποψηφιότητας

Επίλυση μέσω Simplex

- Αρχική λύση (Βάση)
- Υπολογισμός κριτηρίων υποψηφιότητας
- Αλλαγή βάσης

Επίλυση μέσω Simplex

- Αρχική λύση (Βάση)
- Υπολογισμός κριτηρίων υποψηφιότητας
- Αλλαγή βάσης

$rank(A) = m + n - 1 \Rightarrow$ Βέλτιστη Λύση

Επίλυση μέσω Simplex

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

$m + n - 1$ γραμμές ανεξάρτητες

nm ~~κολόνες ανεξάρτητες~~

Επίλυση μέσω Simplex

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

$m+n-1$ γραμμές ανεξάρτητες

nm ~~κολόνες ανεξάρτητες~~

$$A = \begin{cases} 0 & \\ 1 \quad \text{στις γραμμές} & \begin{cases} k & , \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_k \\ m+l & , \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_l \end{cases} \end{cases}$$

Βασική Λύση

- $G(V_d \cup V_b, E)$

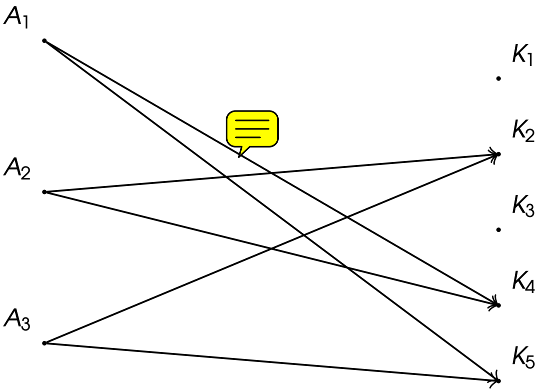
Βασική Λύση

- $G(V_d \cup V_b, E)$
- $|V_d \cup V_b| = m + n$, $|E| = m + n - 1$

Βασική Λύση

- $G(V_d \cup V_b, E)$
- $|V_d \cup V_b| = m + n$, $|E| = m + n - 1$
- Ο γράφος G πρέπει να είναι δένδρο δηλαδή να μην έχει κύκλο για να αποτελεί βασική λύση!

Βασική Λύση (Παράδειγμα 1)



Κύκλος :$(A_1, K_4, A_2, K_2, A_3, K_5, A_1)$

Βασική Λύση (Παράδειγμα 1)

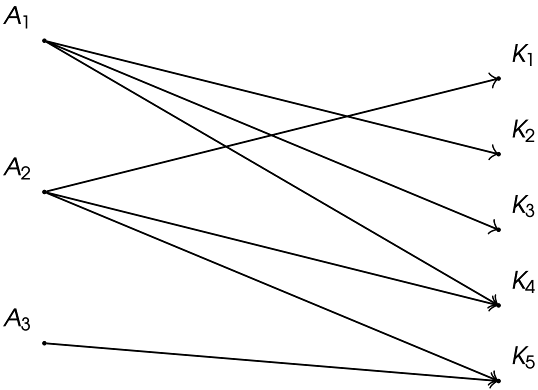
$$\text{Πίνακας :} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βασική Λύση (Παράδειγμα 1)

$$\text{Πίνακας}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

μη αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ δεν μπορεί να είναι βάση!

Βασική Λύση (Παράδειγμα 1)



Δένδρο

Βασική Λύση (Παράδειγμα 2)

$$\text{Πίνακας}: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βασική Λύση (Παράδειγμα 2)

$$\text{Πίνακας}: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ βάση!

Βασική Λύση (Παράδειγμα 2)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1		6	3	2		11
A_2	6			0	6	12
A_3					7	7
	6	6	3	2	13	

Βασική Λύση (Παράδειγμα 2)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1		6	3	2		11
A_2	6			0	6	12
A_3					7	7
	6	6	3	2	13	

Εκφυλισμένη περίπτωση, μεταβλητή βάσης με τιμή μηδέν

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (ΜΒΓ) $\Rightarrow$ Β.Ε.Λ

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (ΜΒΓ) $\Rightarrow$ Β.Ε.Λ

- $x_{ij} = \min(d_i, b_j)$, i μικρότερη γραμμή, j μικρότερη στήλη

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (ΜΒΓ) $\Rightarrow$ Β.Ε.Λ

- $x_{ij} = \min(d_i, b_j)$, i μικρότερη γραμμή, j μικρότερη στήλη
- Υπολογισμός νέων μεταβλητών $d_i' = d_i - \min(d_i, b_j)$, $b_j' = b_j - \min(d_i, b_j)$

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (ΜΒΓ) $\Rightarrow$ Β.Ε.Λ

- $x_{ij} = \min(d_i, b_j)$, i μικρότερη γραμμή, j μικρότερη στήλη
- Υπολογισμός νέων μεταβλητών $d_i' = d_i - \min(d_i, b_j)$, $b_j' = b_j - \min(d_i, b_j)$
- Αφαίρεση της κορεσμένης ~~μεταβλητής~~

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (ΜΒΓ) $\Rightarrow$ Β.Ε.Λ

- $x_{ij} = \min(d_i, b_j)$, i μικρότερη γραμμή, j μικρότερη στήλη
- Υπολογισμός νέων μεταβλητών $d_i' = d_i - \min(d_i, b_j)$, $b_j' = b_j - \min(d_i, b_j)$
- Αφαίρεση της κορεσμένης ~~μεταβλητής~~
- Επανάληψη με τον νέο πίνακα

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1						11
A_2						12
A_3						7
	6	6	3	2	13	

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6					5
A_2						12
A_3						7
	0	6	3	2	13	

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5				0
A_2						12
A_3						7
	0	1	3	2	13	

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5				0
A_2		1				11
A_3						7
	0	0	3	2	13	

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5				0
A_2		1	3			8
A_3						7
	0	0	0	2	13	

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5				0
A_2		1	3	2		6
A_3						7
	0	0	0	0	13	

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5				0
A_2		1	3	2	6	0
A_3						7
	0	0	0	0	7	

Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5				0
A_2		1	3	2	6	0
A_3					7	0
	0	0	0	0	0	

Μέθοδος Reduced Costs

Μέθοδος Reduced Costs

- $y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

- $y_{m+n} = 0$
- $y = c_b B^{-1} \Rightarrow yB = c_b \Rightarrow$
  $d_{ij} = \cancel{cij} - y_i - y_{m+j}$

Μέθοδος Reduced Costs

- $y_{m+n} = 0$
- $y = c_b B^{-1} \Rightarrow yB = c_b \Rightarrow$
  $d_{ij} = cij - y_i - y_{m+j}$
- $d_{ij} = 0, \forall (i,j) \in B$ δηλαδή $c_{ij} = y_i + y_{m+j}, \forall (i,j) \in B$

Μέθοδος Reduced Costs

- $y_{m+n} = 0$
- $y = c_b B^{-1} \Rightarrow yB = c_b \Rightarrow$
  $d_{ij} = cij - y_i - y_{m+j}$
- $d_{ij} = 0, \forall (i,j) \in B$ δηλαδή $c_{ij} = y_i + y_{m+j}, \forall (i,j) \in B$
- $d_{ij} = c_{ij} - y_i - y_{m+j}, \forall (i,j) \notin B$

Μέθοδος Reduced Costs

Υπολογισμός διανύσματος y :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	+1	+1				y_1
A_2		+3	+4	+8	+8	y_2
A_3					+10	
	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	

$c_{11} = y_1 + y_4$ $\quad c_{24} = y_2 + y_7$

$c_{12} = y_1 + y_5$ $\quad c_{25} = y_2 + y_8$

$c_{22} = y_2 + y_5$ $\quad c_{35} = y_3 + y_8$

$c_{23} = y_2 + y_6$ $\quad m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$

Υπολογισμός διανύσματος y :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	+1	+1				y_1
A_2		+3	+4	+8	+8	+8
A_3					+10	+10
	y_4	y_5	y_6	y_7	0	

$c_{ij} = y_i + y_{m+j}$ $\quad y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

Υπολογισμός διανύσματος y :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	+1	+1				y_1
A_2		+3	+4	+8	+8	+8
A_3					+10	+10
	y_4	-5	-4	0	0	

$c_{ij} = y_i + y_{m+j} \quad y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

Υπολογισμός διανύσματος y :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	+1	+1				+6
A_2		+3	+4	+8	+8	+8
A_3					+10	+10
	y_4	-5	-4	0	0	

$c_{ij} = y_i + y_{m+j} \quad y_{m+n} = 0$

Υπολογισμός διανύσματος y :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	+1	+1				+6
A_2		+3	+4	+8	+8	+8
A_3					+10	+10
	-5	-5	-4	0	0	

$c_{ij} = y_i + y_{m+j} \quad y_{m+n} = 0$

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	1 / 0	1 / 0	2	6	3	+6
A_2	4	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
A_3	5	6	7	12	10 / 0	+10
	-5	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	1 / 0	1 / 0	2 / 0	6 / 6	3 / -3	+6
A_2	4 / 1	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
A_3	5 / 0	6 / 1	7 / 1	12 / 2	10 / 0	+10
	-5	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	1 / 0	1 / 0	2 / 0	6 / 6	3 / -3	+6
A_2	4 / 1	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
A_3	5 / 0	6 / 1	7 / 1	12 / 2	10 / 0	+10
	-5	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Μέθοδος Reduced Costs

- Εισάγωντας μια καινούρια μεταβλητή δημιουργείται ένας κύκλος στο γράφο

Μέθοδος Reduced Costs

- Εισάγωντας μια καινούρια μεταβλητή δημιουργείται ένας κύκλος στο γράφο
- Πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις μεταβλητές που στο γράφο αντιπροσωπούν τις ακμές θα μηδενιστεί

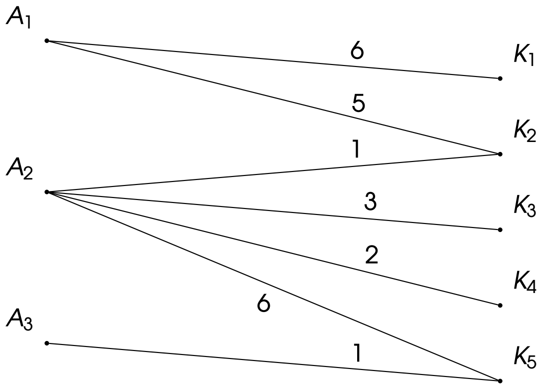
Μέθοδος Reduced Costs

- Εισάγωντας μια καινούρια μεταβλητή δημιουργείται ένας κύκλος στο γράφο
- Πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις μεταβλητές που στο γράφο αντιπροσωπούν τις ακμές θα μηδενιστεί
- Αυξάνουμε την εισερχόμενη μεταβλητή και σεβόμενοι τους περιορισμούς τροποποιούμε τις μεταβλητές που επηρεάζονται

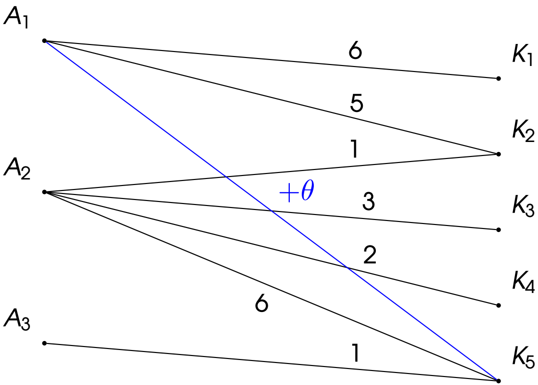
Μέθοδος Reduced Costs

- Εισάγωντας μια καινούρια μεταβλητή δημιουργείται ένας κύκλος στο γράφο
- Πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις μεταβλητές που στο γράφο αντιπροσωπούν τις ακμές θα μηδενιστεί
- Αυξάνουμε την εισερχόμενη μεταβλητή και σεβόμενοι τους περιορισμούς τροποποιούμε τις μεταβλητές που επηρεάζονται
- Η πρώτη μεταβλητή που μηδενίζεται εξάγεται από τη βάση

Μέθοδος Reduced Costs

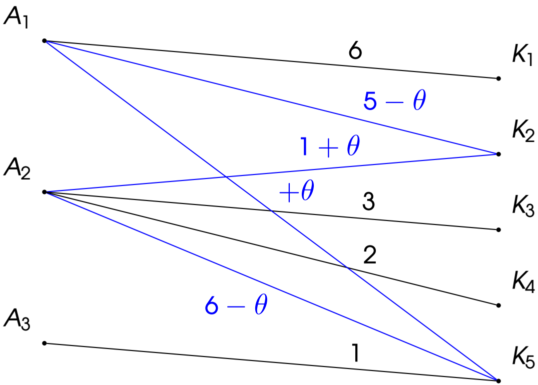


Μέθοδος Reduced Costs

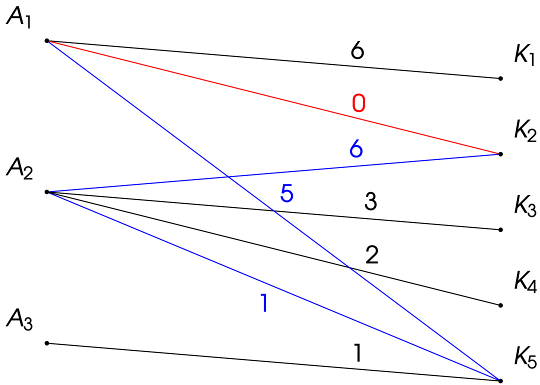


Εισαγωγή μεταβλητής $x_{25} = \theta$

Μέθοδος Reduced Costs

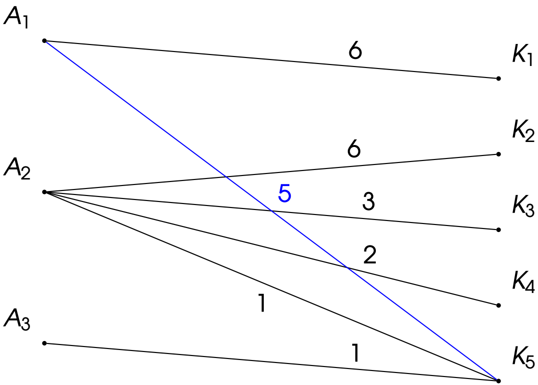


Δημιουργία κύκλου $(A_1, K_2, A_2, K_5, A_1)$



Μηδενισμός μεταβλητής $x_{1\cancel{5}}$, $\theta = 5$

Μέθοδος Reduced Costs



Καινούριο Δένδρο

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5-θ			+θ	11
A_2		1	$3\cancel{+\theta}$	2	6-θ	12
A_3					7	
	6	6	3	2	13	

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6	5-θ			+θ	11
A_2		1	$3\cancel{+\theta}$	2	6-θ	12
A_3					7	
	6	6	3	2	13	

$\theta = 5$

Μέθοδος Reduced Costs

	1	2	3	4	5	
1	+1				+3	
2		+3	+4	+8	+8	
3					+10	
					0	

$c_{ij} = y_i - y_{j+m} \quad y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

	1	2	3	4	5	
1	+1				+3	+3
2		+3	+4	+8	+8	+8
3					+10	+10
					0	

$c_{ij} = y_i - y_{j+m} \quad y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

	1	2	3	4	5	
1	+1				+3	+3
2		+3	+4	+8	+8	+8
3					+10	+10
	-2	-5	-4	0	0	

$c_{ij} = y_i - y_{j+m} \quad y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
1	1 / 0	1	2	6	3 / 0	+3
2	4	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
3	5	6	7	12	10 / 0	+10
	-2	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
1	1 / 0	1 / 3	2 / 3	6 / 3	3 / 0	+3
2	4 / -2	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
3	5 / -3	6 / 1	7 / 1	12 / 2	10 / 0	+10
	-2	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
1	1 / 0	1 / 3	2 / 3	6 / 3	3 / 0	+3
2	4 / -2	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
3	5 / **-3**	6 / 1	7 / 1	12 / 2	10 / 0	+10
	-2	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - \left(y_i + y_{m+j}\right)$$

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6-θ	5			5+θ	11
A_2		1	3	2	6	12
A_3	+θ				7-θ	
	6	6	3	2	13	

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	6-θ	5			5+θ	11
A_2		1	3	2	6	12
A_3	+θ				7-θ	
	6	6	3	2	13	

$\theta = 6$

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1					$+3$	
A_2		$+3$	$+4$	$+8$	$+8$	
A_3	$+5$				$+10$	
					0	

$c_{ij} = y_i - y_{j+m} \quad y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1					+3	+3
A_2		+3	+4	+8	+8	+8
A_3	+5				+10	+10
					0	

$c_{ij} = y_i - y_{j+m} \quad y_{m+n} = 0$

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1					+3	+3
A_2		+3	+4	+8	+8	+8
A_3	+5				+10	+10
	-5	-5	-4	0	0	

$c_{ij} = y_i - y_{j+m} \quad y_{m+n} = 0$

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	1	1	2	6	3 / 0	+3
A_2	4	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
A_3	5 / 0	6	7	12	10 / 0	+10
	-2	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Μέθοδος Reduced Costs

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	1 / 1	1 / 3	2 / 3	6 / 3	3 / 0	+3
A_2	4 / 4	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
A_3	5 / 0	6 / 1	7 / 1	12 / 2	10 / 0	+10
	-2	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Υπολογισμός d_{ij} :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1	1 / 1	1 / 3	2 / 3	6 / 3	3 / 0	+3
A_2	4 / 4	3 / 0	4 / 0	8 / 0	8 / 0	+8
A_3	5 / 0	6 / 1	7 / 1	12 / 2	10 / 0	+10
	-2	-5	-4	0	0	

$$d_{ij} = c_{ij} - (y_i + y_{m+j})$$

Όλα τα στοιχεία d_{ij} είναι θετικά!

Μέθοδος Reduced Costs

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1					11	11
A_2		6	3	2	1	12
A_3	6				1	
	6	6	3	2	13	

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
A_1					11	11
A_2		6	3	2	1	12
A_3	6				1	
	6	6	3	2	13	

Βέλτιστη Λύση

$x^*_{15} = 11,\ x^*_{22} = 6,\ x^*_{23} = 3,\ x^*_{24} = 2,$
$x^*_{25} = 1,\ x^*_{31} = 6,\ x^*_{36} = 1$

- Μοντελοποιούμε το πρόβλημα μεταφοράς με χρήση περιορισμών τις μορφής $Ax \geq b$

Πρόβλημα μεταφοράς και Simplex

- Μοντελοποιούμε το πρόβλημα μεταφοράς με χρήση περιορισμών τις μορφής $Ax \geq b$
- Μετασχηματίζουμε τις ανισώσεις : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} -x_{ij} \geq -b_j$

- Μοντελοποιούμε το πρόβλημα μεταφοράς με χρήση περιορισμών τις μορφής $Ax \geq b$
- Μετασχηματίζουμε τις ανισώσεις : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} -x_{ij} \geq -b_j$
- Κατασκευάζουμε σύμφωνα με τη νέα μορφή των περιορισμών τον πίνακα A και το διάνυσμα b

Πρόβλημα μεταφοράς και Simplex (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	
A_1	5	1	1	4
A_2	2	6	9	6
	3	5	2	

Πρόβλημα μεταφοράς και Simplex (Παράδειγμα)

	K_1	K_2	K_3	
A_1	5	1	1	4
A_2	2	6	9	6
	3	5	2	

$$\min w = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{21} &\geq \cancel{6} \\ x_{12} + x_{22} &\geq 5 \\ x_{13} + x_{23} &\geq 2 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 4 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 6 \end{aligned}$$

$$\min w = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{21} \geq 6 \\
& x_{12} + x_{22} \geq 5 \\
& x_{13} + x_{23} \geq 2 \\
& -x_{11} - x_{12} - x_{13} \geq -4 \\
& -x_{21} - x_{22} - x_{23} \geq -6
\end{aligned}$$

Πρόβλημα μεταφοράς και Simplex (Παράδειγμα)

$$\min w = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{21} \geq \cancel{6} \\
& x_{12} + x_{22} \geq 5 \\
& x_{13} + x_{23} \geq 2 \\
& -x_{11} - x_{12} - x_{13} \geq -4 \\
& -x_{21} - x_{22} - x_{23} \geq -6
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα Προβλήματος Μεταφοράς

Θεώρημα 1

Έστω ένα πρόβλημα μεταφοράς που ισχύει $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} d_i$ τότε

προβλήματα

(1)

$$\begin{aligned} \min w &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \min w &= cx \\ \text{s.t.} \quad Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμα ως προς τις λύσεις τους.

Απόδειξη

$(\cancel{2}) \Rightarrow \cancel{(1)}$: τετριμμένο

<u>$(2) \Rightarrow (1)$</u> Έστω πως $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} > b_j$ για ένα κατάστημα j τότε αθροίζοντας

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1}$$

Θεωρήματα Προβλήματος Μεταφοράς

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$ Έστω πως $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} > b_j$ για ένα κατάστημα j τότε αθροίζοντας

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1)$$

αντιστοιχα αθροίζοντας και αντιστρέφοντας τις ανισότητες που αφορούν τις διαθέσιμες ποσότητες των αποθηκών :

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\cancel{m}} x_{ij} \quad > \quad -\sum_{i=1}^{m} d_i \qquad (2)$$

Θεωρήματα Προβλήματος Μεταφοράς

<u>(2) $\Rightarrow$ (1)</u> Έστω πως $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} > b_j$ για ένα κατάστημα j τότε αθροίζοντας

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1)$$

αντιστοιχα αθροίζοντας και αντιστρέφοντας τις ανισότητες που αφορούν τις διαθέσιμες ποσότητες των αποθηκών :

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\cancel{m}} x_{ij} \quad \cancel{>} \quad -\sum_{i=1}^{m} d_i \qquad (2)$$

τέλος προσθέτοντας $(1)+(2)$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} d_i$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω πως $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} > b_j$ για ένα κατάστημα j τότε αθροίζοντας

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1)$$

αντιστοιχα αθροίζοντας και αντιστρέφοντας τις ανισότητες που αφορούν τις διαθέσιμες ποσότητες των αποθηκών :

$$-\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\cancel{m}} x_{ij} \quad \cancel{>} \quad -\sum_{i=1}^{m} d_i \qquad (2)$$

τέλος προσθέτοντας $(1) + (2)$:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} d_i$$

$$0 \quad > \quad 0$$

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$ Έστω πως $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} > b_j$ για ένα κατάστημα j τότε αθροίζοντας

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1}$$

αντιστοιχα αθροίζοντας και αντιστρέφοντας τις ανισότητες που αφορούν τις διαθέσιμες ποσότητες των αποθηκών :

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad -\sum_{i=1}^{m} d_i \tag{2}$$

τέλος προσθέτοντας $(1) + (2)$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad > \quad \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} d_i$$

$$0 \quad > \quad 0$$

Άτοπο!

Θεωρήματα Προβλήματος Μεταφοράς

Ορισμός

Ένας πίνακας A θα λέγεται totally unimodular αν για την ορίζουσα κάθε τετράγωνου υποπίνακα A' του A ισχύει :

$$det(A') = -1, 0, +1$$

Θεωρήματα Προβλήματος Μεταφοράς

Ορισμός

Ένας πίνακας A θα λέγεται totally unimodular αν για την ορίζουσα κάθε τετράγωνου υποπίνακα A' του A ισχύει :

$$det(A') = -1, 0, +1$$

Θεώρημα

Έστω ένας totally unimodular πίνακας A. Για οποιοδήποτε διάνυσμα b το γραμμικο σύστημα :

$$\begin{aligned} \min w &= cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

έχει ακέραιες βέλτιστες λύσεις

Θεωρήματα Προβλήματος Μεταφοράς

Ορισμός

Ένας πίνακας A θα λέγεται totally unimodular αν για την ορίζουσα κάθε τετράγωνου υποπίνακα A' του A ισχύει :

$$det(A') = -1, 0, +1$$

Θεώρημα

Έστω ένας totally unimodular πίνακας A. Για οποιοδήποτε διάνυσμα b το γραμμικο σύστημα :

$$\begin{aligned} \min w &= cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

έχει ακέραιες βέλτιστες λύσεις

Άρα η Simplex δίνει πάντα ακέραιες βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα μεταφοράς